12夜 : Mathieu Moonshineに対する群論的アプローチ (代数的組合せ論および有限群・頂点作用素代数とその表現の研究)

宮本, 雅彦

数理解析研究所講究録 第2086巻 2018年 99-104

１２夜
Mathieu Moonshine に対する群論的アプローチ

宮本雅彦
筑波大学数理物質系数学域

Dec. 12, 2017@RIMS

12 夜とはシェイクスピアの三大喜劇の一つあり、双子の妹が兄の格好で働くことで起こるドタバタの後に、ハッピーエンドになる話である。それを念頭に私の話を聞いていただきたい。これは、熊本大学千吉良直紀氏との共同研究である。
ここでは、次の４つのものが関係する。

K3 曲面の楕円種数 (弱) Jacobi 形式	数理物理から 中心電荷 6 の $N=4$ 超共形代数	群論から Mathieu 群 M_{24}	数論から モックモジュラー関数

上記の４者が演ずる舞台は、

超頂点作用素代数 (S+VOA, Super Vertex Operator Algebra)

であり、それぞれ次のような役で出てきます。

ウエイト１の元によるトレイス関数	SubSVOA	自己同型群	Jacobi form÷Jacobi form？ 私の話では説明しません。

(1) プロローグ: マシュー M_{24} ムーンシャインと予想の説明
(2) 舞台設営：　中心電荷１２の SVOA の説明
(3) Act 1: 上の舞台での K3 曲面の楕円種数の振る舞いを紹介
(4) Act 2: 上の舞台でのマシュー群 M_{24} の演技
(5) Act 3: g-不変 $N=4$ 中心電荷 6 の超共形代数の構成
(6) Act 4: トラブル続発と良報、そして双子の出現と大団円

1　プロローグ

1.1　超共形代数

CFT-型の超頂点作用素代数 $V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_{n/2}$ を使って説明する。CFT-型とは $\mathbf{1}$ を真空とすると、$V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$ となるものをいう。
V のヴィラソロ元を $\omega\in V_2$ と置く。V は超頂点代数なので、各 $v\in V$ に対して, 無限個の作用 $v(n)\in \mathrm{End}(V)$ $(n\in\mathbb{Z})$ が定義されている。例えば、 $\mathbf{1}(n)=\delta_{n,-1}$ である。超頂点代数の重要な性質は、$v\in V_{\mathrm{wt}(v)}$ に対して, $v(n):V_m\to V_{m+\mathrm{wt}(v)-n-1}$ であり、超交換関係式

$$[v(n),u(m)]\,(:\stackrel{\mathrm{def}}{=}v(n)u(m)-(-1)^{4\mathrm{wt}(v)\mathrm{wt}(u)}u(m)v(n))=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}(v(j)u)(n+m-j)$$

を満たしている。ウエイトの小さい順に超交換関係式を見ていくと、
(1) もし $v, u \in V_{1/2}$ なら, $\mathbb{C}\mathbf{1} \ni v(0)u = \langle v, u\rangle \mathbf{1}$ で内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が定義でき、 $[v(n), u(m)] = \langle v, u\rangle \delta_{n+m,-1}$ となる。このような元は『フェルミオン』と呼ばれている。
(2) もし $v, u \in V_1$ かつ $\omega(2)V_1 = 0$ なら、$v(0)u \in V_1$, $v(1)u = \langle v, u\rangle \mathbf{1}$ であり、$(V_1, 0\text{-積})$ は不変内積を持つリー代数となっている。
(3) もし $v, u \in V_{3/2}$ なら, $v(0)u \in V_2, v(1)u \in V_1, v(2)u \in \mathbb{C}\mathbf{1}$ である。さらに、
(3-1) もし $v(0)v = 2\omega$ $v(1)v = 0$ なら, 1 元 v で生成される部分超頂点代数 $VA(v)$ を $N=1$ 超共形代数と呼ばれている。これらは、リー超代数の表現として、Neveu-Schwartz 代数（$n, m \in \mathbb{Z}/2$）と Ramond 代数（$n, m \in \mathbb{Z}$）の 2 つの顔を持つ。
(3-2) 2 元 v, u 生成で、$\dim(VA(v, u))_1 = 1$ となるものを $N=2$ 超共形代数と呼ぶ。(これはミラー対称性に使われ注目された。)
(3-3) 4 元生成で、 $(VA(v, u, v^*, u^*))_1 \cong sl_2$ (3-dim) となるものを $N=4$ 超共形代数と呼ぶ。

1.2　マシュームーンシャイン

江口、大栗、立川の 3 名が次の 3 つの間に神秘的な関係があることに気づいたのが出発点である。
(1) K3 曲面の楕円種数 $Z^{ell}_{K3}(z, \tau)$（Witten 種数の変形）
弱 Jacobi 形式（wt= 0, index= 1）であり, $\lim_{q\to 0} Z(0, \tau) = 24$ の条件で一意的に決まる。

$$Z^{ell}_{K3}(z, \tau) = 20 + 2(\zeta + \zeta^{-1}) + f_1(z)q + f_2(z)q^2 + \cdots \quad (q = e^{2\pi i\tau}, \zeta = e^{2\pi i z})$$

(2) 中心電荷 6 の N=4 超共形代数 $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ Ramond 既約加群の指標は

$$\mathrm{ch}_{h=1/4,\ell=0}(z, \tau), \quad \mathrm{ch}_{h=n+1/4,\ell=1/2}(z, \tau) = q^{n-1/8}\frac{\theta_1(z,\tau)^2}{\eta(\tau)^3}, n = 0, 1, \ldots$$

で与えられる。この時、Witten の結果より、ある整数係数 A_n があって、線形和

$$Z^{ell}_{K3}(z, \tau) = 24\mathrm{ch}_{\ 1/4,0}(z, \tau) + \sum_{n=0}^{\infty} {}^{\exists}A_n \mathrm{ch}_{\ n+1/4,1/2}(z, \tau)$$

と表示できることが知られていた。そこで、大栗 [1988] はいくつかの係数を計算した。

$$A_0 = -2, A_1 = 90, A_2 = 462, A_3 = 1540$$

2010 年に上記の 3 人はこれらの数字が下の次数の簡単な和であることに気づいた。
(3) Mathieu 単純群 M_{24} の既約加群の次数
$1, 23, 45, 45, 231, 231, 252, 253, 483, 770, 770, 990, 990, 1035, \ldots$

1.3　マシュームーンシャイン予想

そこで、3 人は次のような質問（予想）を立てた。
予想:　A_n は M_{24}-加群の次数ではないか？
期待として:　$K3$ 曲面と M_{24} と $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ の間に関係があるのではないか？
(例えば、$M_{24} \times \mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ が $Z^{ell}_{K3}(z, \tau)$ を定義する空間に作用しているのではないかということである。)

この予想が広く注目された理由の一つは、$\sum_{n=0}^{\infty} A_n q^n$ が"Mock テータ級数" (Ramanujan が定義したもの) になっていたことである。これは、モンスター単純群にまつわるムーンシャイン予想における種数 0 のモジュラー関数を彷彿させた。モンストラスムーンシャインにおけるトンプソン級数のように、マシュームーンシャインでも、各 $g \in M_{24}$ に、"ツイスト楕円種数"(江口、樋上)

$$Z_g^{ell}(z,\tau) = (1+\chi_2(g))\mathrm{ch}_{1/4,0}(z,\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(g) ch_{n+1/4,1/2}(z,\tau)$$

が与えられ、予想は、「$A_n(*)$ が M_{24} の指標ではないか？」の形になった。

その後、計算機を使って多くの係数 ($\sim q^{300}$) の指標の表示が求められ、最終的に、ギャノン [2012] が、この膨大なデータとモックテータ級数の性質を使って、予想を示した。(論文名は "Much Ado About Mathieu" である。Much Ado About Nothing（空騒ぎ）はシェイクスピアの喜劇の 1 つであり、この講演内容は上の論文に対する返歌のつもりである。)

しかし、M_{24} と $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ と $Z_{K3}^{ell}(z,\tau)$ の関係は以前不明である。

2　１２夜の舞台の設営

１２夜の舞台となる**超頂点作用素代数 SVOA** を構成する。

格子 SVOA V_L とは $\mathbb{Z}$-値正定値格子 L に対して、２つの性質

(1) L の加法： $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}} L \subseteq (V_L)_1$,　$(v\in \mathbb{C}L \to v(-1)\mathbf{1}\in (V_L)_1)$ と

(2) L の群環： 各 $\alpha \in L$ に対して、 $e^{\alpha} \in (V_L)_{<\alpha,\alpha>/2}$

を利用して構成される SVOA であり、中心電荷は L のランク、指標は次で与えられる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim(V_L)_n q^{n-\mathrm{rank}(L)/24} = \theta_L(\tau)/\eta(\tau)^{\mathrm{rank}(L)}$$

Duncan, et al. [2015] は中心電荷 12 の格子 SVOA $V_{D_{12}+}$ を構成し、V_L のいくつかの自己同型群と可換な中心電荷 12 の超共形代数を構成した。

マシュームーンシャインに出てくる超共形代数は中心電荷 6 なので、一見無関係のように見えるが、この中に隠れていたというのが今回の１２夜の話である。それを見るために、上記の SVOA の性質を見ていこう。

$x_1,...,x_{12}$ 正規直交基底とすると、

$$D_{12} = \left\{ \sum_{i=1}^{12} a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^{12} a_i \equiv 0 \pmod 2 \right\}$$

はタイプ D_{12} の偶格子となる。その双対格子 D_{12}^* は、 $f = \frac{x_1+\cdots+x_{12}}{2}$ と置いて、

$$D_{12}^* = D_{12} \cup (D_{12}+x_1) \cup (D_{12}+f) \cup (D_{12}+f-x_1)$$

となる。この時、格子 VOA 理論から、$V_{D_{12}}$-既約加群は次の 4 つである。

$$V := V_{D_{12}},\ W^1 := V_{D_{12}+x_1},\ W^2 := V_{D_{12}+f},\ W^3 := V_{D_{12}+f-x_1}$$

補題 1 $D_{12}\cup(D_{12}+t)$　($^{\forall}t = x_1, f, f-x_1$) は正則格子なので、$V\oplus W^i$　($i=1,2,3$) は正則 *SVOA* となる。(正則 *SVOA* の重要な性質として、既約加群は自分自身だけ、トレースは $SL_2(\mathbb{Z})$-不変となっている。)

3　舞台上での楕円種数の姿

weight 1 の元 $x_i(-1)\mathbf{1}$ と $V \oplus W^h$ が正則 SVOA であることを使って、次を得る。

補題 2 $x_1(-1)\mathbf{1} + x_2(-1)\mathbf{1}$ に対して、トレイス関数

$$Z^h(z,\tau) := \mathrm{Tr}_{V\oplus W^h}\zeta^{(x_1(0)+x_2(0))}q^{L(0)-12/24}, \qquad \text{ここで } \zeta = e^{2\pi iz}, q = e^{2\pi i\tau}$$

は弱 *Jacobi* 形式となる。（注釈 : q の冪は V 上で半整数で、W^i 上では整数である.）
整数冪だけを考えて、定数項を比較してみると、次に事実が分かる。

$$\text{事実}\quad Z^{ell}_{K3}(z,\tau) = Z^1(z,\tau) - Z^3(z,\tau)$$

（注釈： $W^1 \oplus W^3$ は $(V_{D_{12}} \oplus W^2)$-ラモン加群である。）

3.1　$V \oplus W^1$ への M_{24} の作用

散在型有限単純群**マシュー群** M_{24} は 24 点集合上の 5 重置換群であり、位数は 244823040 であり、ゴーレイ符号 $G_{24} \subseteq \mathbb{Z}_2{}^{\oplus 24}$（自己双対偶コード）の全自己同型群である。

定義 1 前に述べたフェルミノン $a \in V_{1/2}$ の性質 $a(n)a(m) + a(m)a(n) = \delta_{n+m,-1}$ から、一元 a で生成した SVOA(a) は $L(\frac{1}{2},0) \oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ と同型である。ここで、$L(\frac{1}{2},0)$: 2 次元イジング模型と呼ばれる中心電荷 1/2 の単純頂点作用素代数であり、, $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ は最小ウエイト $\frac{1}{2}$ の既約加群である。

補題 3 格子 *SVOA* $V_{\mathbb{Z}x_1}$ において、 $e^{x_1} + e^{-x_1}$ と $i(e^{x_1} - e^{-x_1})$ の 2 つが互いに直交したフェルミオンであり、

$$V_{\mathbb{Z}x_1} \cong \left(L(\frac{1}{2},0) \oplus L(\frac{1}{2},0)\right) \otimes \left(L(\frac{1}{2},0) \oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right)$$

である。それゆえ、

$$V \oplus W^1 \cong (L(\frac{1}{2},0) \oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))^{\otimes 24}$$

特に、M_{24} は成分の置換として作用している。

Adermollo[1976] は 12 個の直交フェルミオンから中心電荷 6 の $N=4$ 超共形代数 $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ を $V_D \oplus V_{D+x_1}$ の中に構成したが、今回必要なのは $V_D \oplus V_{D+e}$ の中の中心電荷 6 の $N=4$ 超共形代数である。

3.2　$V \oplus W^2$ への M_{24} の作用

$V \oplus W^1$ は $L(\frac{1}{2},0)$ と $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ だけで構造が分かるが、W^2, W^3 はそれだけでは不十分である。$L(\frac{1}{2},0)$ の既約加群として上記以外に $L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ がある。これを使って、W^2, W^3 の構造を見ていこう。まず、ゴーレイ符号

$$G_{24} \subseteq \{\text{偶コード全体}\} \subseteq (\mathbb{Z}_2)^{24} \qquad M_{24}\text{-不変部分群の列}$$

を考え、２元符号の内積を利用して、位数２の元 z による中心拡大

$$2^{1+12} \subseteq 2^{1+23} \subseteq 2^{1+24}$$

を考える。ここで、2^{1+n} は位数２の中心元 z で商を取ると 2^n の基本アーベル群となる exstra-special 2-群である。θ を 2^{1+12} の１次表現で z が自明でないものとすると、その誘導表現 $T = \mathrm{Ind}^{2^{1+23}}(\theta)$ は、次元が 2^{11} であり、M_{24}-加群でもある。

命題 1 $$W^2 \cong L(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{16})^{\otimes 24} \otimes T, \quad (W^3 \text{ もほぼ同じ})$$

上記の表現に対する M_{24} による固定元を計算してみると、

補題 4 $$\dim(V \oplus W^2)^{M_{24}}_{3/2} = 1$$

それゆえ、${}^{\exists}\xi \in (W^2)^{M_{24}}_{3/2}$ で、$\xi_0 \xi = 2\omega$ が存在する。この ξ は次の部分節で利用する。

3.3 $V \oplus W^2$ の中の超共形代数 $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$

格子 SVOA の中に超共形代数を見つける方法として、最近発表された結果がある。

定理 5 (Mason-Tuite-Yamskulna(2017)) *L を正定値奇格子で、最小ウエイト $\mathrm{wt}(L) \geq 2$ とする。V_L を格子 $SVOA$ とする。以下の条件を満たす $A, B \subseteq V_{3/2}$ があるとする*
(I) A と B は 2-次元の sl_2-加群で、$\dim(A+B) = 4$
(II) $A(1)B \cong sl_2$, $A(1)A = B(1)B = 0$,
(III) sl_2 は L のあるルートを含む。$i.e.$ $\ni e^x \quad (x$ ルート$)$
この時、A, B で生成される $VA(A,B) \cong \mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ である。

この定理の応用として、

定理 6 *$H < M_{24}$ に対して、同型 σ があって、H-不変な*

$$sl_2 \cong \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e^{x_1+x_2}, e^{-x_1-x_2}, x_1(-1)\mathbf{1} + x_2(-1)\mathbf{1}\}^{\sigma} \subseteq (V_{D_{12}})_1$$

があれば、H-不変な超共形代数 $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ を次のように構成できる。

$$G^1 = (e^{x_1+x_2})^{\sigma}(0)\xi, \qquad G^2 = (e^{-x_1-x_2})^{\sigma}(0)(e^{x_1+x_2})^{\sigma}(0)\xi$$
$$\bar{G}^1 = (e^{-x_1-x_2})^{\sigma}(0)\xi, \qquad \bar{G}^2 = (e^{x_1+x_2})^{\sigma}(0)(e^{-x_1-x_2})^{\sigma}(0)\xi$$

とおくと、$A = < G^1, G^2 >, B = < \bar{G}^1, \bar{G}^2 >$ は定理 5 の条件を満たす。

4 マシュームーンシャイン現象と１２夜（トラブル）

定義 2 *(マシュー群の類関数)* ${}^{\forall}g \in M_{24}$, g-不変な ${}^{\exists}\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ が存在し、$g \ltimes \mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ は $W^1 \oplus W^3$ に作用している。この時、$A_n(*)$ を次のように定義する。

$$\frac{\theta_1(z,\tau)^2}{\eta(\tau)^3} \times \sum A_n(g) q^{n-1/8} = \mathrm{Tr}_{M_g(W^1 \oplus W^3) - (W^2 \oplus W^3)}\, g \zeta^{\alpha(0)} q^{L(0)-1/2},$$

ここで、 $M_g(W^1 \oplus W^3)$ は $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ のウエイトが 1/4 でない加群全体である。

質問：$M_{24} \times \mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ が $(W^1 \oplus W^3) - (W^2 \oplus W^3)$ に作用している？
答:　否　(Bad News)
事実: $((V_{D_{12}})^{M_{24}})_1 = 0$　M_{24} は sl_2 さえ固定しない。

> **More bad news**
> 1つの元でも、$g = 23A, 23B$ の場合には、g と可換な $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ の作用は無い。

5　朗報

> (1) 舞台の頂点作用素代数の中心電荷は 12. 一方超共形代数の中心電荷 6 なので、双子 $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6} \otimes \mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ が必要。実際、組を作れる。（劇１２夜の主人公は双子の兄妹）

> (2) **Brauer の定理**　群の類関数 χ が一般指標（２つの指標の差）である必要十分条件はすべての基本部分群 $^\forall H$ への制限 $\chi|_H$ が一般指標であることである。

即ち、マシュー群 M_{24} そのものが出てこなくても、M_{24} の類関数が M_{24} の一般指標となることがある。しかも、M_{24} の基本部分群 (p-群と巡回群の直積) は、{ 巡回群, $\mathbb{Z}_3 \times D_8$, $\mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_2)^2$, Sylow2-群, Sylow3-群 } という簡単な構造を持ったものだけである。

> (3) 基本部分群 H に対して、$V_{D_{12}} \oplus W^2$ の中に、H-不変な双子 $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6} \otimes \mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ が構成できる。（注釈 H の作用と可換というわけではない。）

5.1　双子の兄妹

左右の Virasoro 元を ω^1, ω^2 とする。それぞれ 中心電荷 $cc = 6$ である。
右の $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ の中に含まれる Neveu-Schwartz 代数の元 v を使うことで、

$$v(1/2)v(1/2) = \frac{1}{2}[v(1/2), v(1/2)] = \omega^2(1) - 1/4$$

を得る。そこで、$(\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6})^{even} \otimes (\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6})^{even}$ の加群 $W^1 \otimes W^2 \subseteq W_{D+x_1}$ に対して、

$$\begin{aligned} v(1/2) &: V_{D_{x_1}} \leftrightarrow V_{D_{x_1+e}} \\ W^1 \otimes W^2 &\leftrightarrow v(1/2)(W^1 \otimes W^2) \end{aligned}$$

かつ、左 $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$-加群として、$W^1 \otimes W^2 - v(1/2)(W^1 \otimes W^2) = W^1 \otimes (W^2)_{1/4}$ となるので、差 $W_{D+x_1} - W_{D+e+x_1}$ には $W^2_{1/4} \neq 0$ となる massless 表現 W^2 の相棒 W^1 しか出てこない。結果として、左右の $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ は一つにしか見えない（これが双子 $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6} \otimes \mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ を一つの $\mathcal{A}^{N=4}_{cc=6}$ と誤解した理由である 。）それゆえ、予想に対する次の結果の別証明を得た。

定理 7 $A_n(*)$ は M_{24} の一般指標である。